# ÉNONCÉ

- $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $P \wedge P' = 1$.

→ SUITE DE STURM :

$$\begin{cases} S_0 = P \\ S_1 = P' \\ S_{k-1} = A_k S_k - S_{k+1} \text{ avec } \deg(S_{k-1}) < \deg(S_{k+1}) \end{cases}, \quad A_k \in \mathbb{R}[X].$$

→ $V_{0,p}(x) :=$ # {chang signes STRICTS dans $(S_0(x), \dots S_p(x))$ qd $S_{p+1} = 0$}

<u>TH</u> : Soit $a < b$ tq $P(a)P(b) \neq 0$.

nb de r $\neq$ de P dans $[a, b]$ est $V_{0,p}(a) - V_{0,p}(b)$

# LEÇONS.

142

144

# RÉFS.

⚠ Pas de référence

# RÉSULTATS ASSOCIÉS

# DÉMO

// : à l'oral.
// écrit au tableau.
// : pour comprendre.
// : structure

s'intéresse à compter nb √ ds intervalle : utile ensuite pr localiser !

Ex : choix du $1^{er}$ terme met Newton.

$[a,b]$

. $P \in \mathbb{R}[X]$ $\quad P(a)P(b) \neq 0$ , $\operatorname{pgcd}(P,P') = 1$.

## ① déf de la suite

. $P_0 = P$

. $P_1 = P'$

. $\forall i \geq 1$, $\exists!\ A_i, P_{i+1} \in \mathbb{R}[X]$, $P_{i-1} = A_i P_i - P_{i+1}$. $\deg(P_{i+1}) < \deg(P_i)$.

$P_{i+1}$ est l'opposé du reste dans la div eucli de $P_i$ par $P_{i-1}$.

On a $(\deg P_i) \searrow$ strict + à val ds $\mathbb{N}$ donc : $s = \inf_{i \in \mathbb{N}} \{P_{i+1} = 0\}$. est fini.

par hyp.

. Par l'algo d'Euclide (au signe près) : $\forall i = 0..s-1$, $\operatorname{pgcd}(P_i, P_{i+1}) = P_s = 1$.

Donc pas de √ commune entre 2 termes successifs

On note pr $x \in [a,b]$ $V(x) = V_{0,s}(x) = \#\{$chang signe stricts ds $(P_0(x), \ldots P_s(x))\}$

racines de P

BUT : $V_{0,s}(a) - V_{0,s}(b) = \# \mathcal{R}(P) \cap [a,b]$ $\quad (\times)$

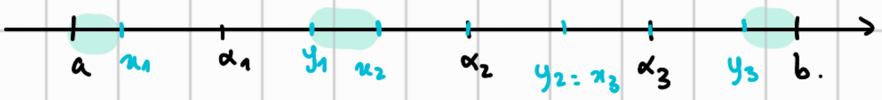
## découpage

$A := \{ \alpha \in [a,b] \ , \exists i \in \{0,\ldots,s-1\} \ P_i(\alpha) = 0 \}$

est fini car les $P_i$ ont un nb fini de √ et ∃ nb fini de $P_i$.

Notons $A = \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$.

On va découper $[a,b]$ en petits intervalles qui ne contiennent qu'1 seul élem de A.




quelle doit être la longueur de l'intervalle $[x_i, y_i]$ ?

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i,j \leq n}} |\alpha_i - \alpha_j|$ , $x_i = \alpha_i - \varepsilon$, $y_i = \alpha_i + \varepsilon$.

* $A \cap [x_i, y_i] = \{\alpha_i\}$ $\forall i$

car si $\alpha_j$ est une autre √ $|\alpha_i - \alpha_j| \geq 2\varepsilon$ donc $\notin [x_i, y_i]$ de long $2\varepsilon$ et $\alpha_i$ pas une borne.

si $\alpha_j \neq \alpha_i$, $|\alpha_j - \alpha_i| \geq 2\varepsilon$

et $x_i \leq \alpha_j \leq y_i \iff -\varepsilon \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \varepsilon \iff |\alpha_i - \alpha_j| \leq \varepsilon$ : NON.

* V est constant sur $[a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$ car aucun des $P_i$ ne s'annule donc pas de chang signe pss.

En particulier,
$$\begin{cases} V(a) = V(x_1), \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!], \ V(y_i) = V(x_{i+1}) \\ V(b) = V(y_n). \end{cases}$$

Et $V(a) - V(b) = \sum_{i=1}^{n} V(x_i) - V(y_i)$ Somme télescopique.

$$\sum_{i=1}^{n} V(x_i) - V(y_i)$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} V(x_i) - V(y_i) + (V(x_n) - V(b)) + V(a) - V(y_1).$$
$$= \sum_{i=2}^{n-1} V(x_i) - V(x_{i+1}) + V(x_n) - V(y_1) + V(a) - V(b)$$
$$= V(\cancel{x_2}) - V(\cancel{x_n}) + V(\cancel{x_n}) - V(\cancel{y_1}) + V(a) - V(b)$$
$$= V(a) - V(b).$$

BUT : $V(x_i) - V(y_i) = \mathbb{1}_{R(P)}(\alpha_i)$ $\begin{cases} = 1 \text{ si } \alpha_i \ \surd \text{ de } P \text{ (potentiellement d'autres } P_j \text{ aussi)} \\ = 0 \text{ si } \alpha_i \text{ pas } \surd \text{ de } P \text{ (donc } \surd \text{ de certains } P_j \ j \neq 0) \end{cases}$

on aura alors (*) car les √ de P ds $[a,b]$ sont parmi les $\alpha_i$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

on regarde ce qu'il se passe qd $x$ passe de $x_i$ à $y_i$.

**Lem 1** : $V_{0,s}(x_i) - V_{0,s}(y_i) = V_{0,1}(x_i) - V_{0,1}(y_i)$

Le nb de chang de signe ds la suite est déter par ce qu'il se passe entre les termes $P_0$ et $P_1$ ie $P$ et $P'$

**si** : $\exists j \in \{1, \ldots, s\}$ tq $P_j(\alpha_i) = 0$.

$P_{j-1}(\alpha_i) = \underbrace{A_j(\alpha_i) P_j(\alpha_i)}_{=0} - P_{j+1}(\alpha_i)$ donc de signe opp.

Donc $P_{j-1}(\alpha_i) P_{j+1}(\alpha_i) < 0$ $(P_s = 1)$ donc strict < car $P_j, P_{j+1}, P_{j-1}$ pas √ commune

Pour $x \in [x_i, y_i]$, par conti $P_{j-1}(x) P_{j+1}(x) < 0$.

$x \mapsto P_{j-1}(x) P_{j+1}(x)$ fonct $< 0$ en un pt de l'intervalle et ne s'annule pas sur l'intervalle car la seule √ d'un des $P_j$ ds $[x_i, y_i]$ est $\alpha_i$ et n'est pas √

Donc $V_{j-1, j+1}(x) = \#\{$chang signes stricts ds $(P_{j-1}(x), P_j(x), P_{j+1}(x))\}$ const sur $[x_i, y_i]$

Que se passe-t-il autour de $P_k$ avec $k+j$ ?

→ si ne s'annule pas en $\alpha_i$ : pas chang signe

→ sinon : même raisonnement

sinon : ok (pas d'annulation donc pas de chang signe).

LEM 2 : si $P(\alpha_i)=0$, $V_{0,1}(y_i) = V_{0,1}(x_i) - 1$

DEM 2 :

| $x$ | $x_i$ | | $\alpha_i$ | | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P^2(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |
| $(P^2)'(x) = 2P'P(x)$ | $-$ | • | $0$ | • | $+$ |
| | | $h<0$ | | $h>0$ | |

Pour $h \neq 0$ petit, $P(\alpha_i+h)P'(\alpha_i+h)$ est du signe de $h$.

continuité

$P, P'$
signe opp avant $\alpha_i$
même signe après $\alpha_i$

**Finalement**

$$V(x_i) - V(y_i) = V_{0,1}(y_i) - V_{0,1}(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } P(\alpha_i) \neq 0 \\ 1 \text{ si } P(\alpha_i) = 0. \end{cases}$$

pas chang signe ds $(P_0, P_1)$ et pas non plus reste suite par LEM 1

le signe du LEM 2 et pas d'autre chang. par LEM 1

• Rq : si $P'(x_i)=0$, le lemme 1 s'applique encore ! on a alors

en $x_i$ : $( + , + \overset{+1}{,} - )$ = opp

en $\alpha_i$ : $( + , 0 , - )$

en $y_i$ : $( + \underset{+1.}{,} - , - )$ = opp

Rq : on a jamais $(+, 0, -)$ car on évalue V hors des racines des $P_j$ !

. ça poserait pb car 0 est à la fois + et -

## SI LE TEMPS

**EXEMPLE :** (deg : 2, psb calcul $\sqrt{\ }$, mais pr voir met

- $P_0 = X^2 + 4X + 1 = (x - \underbrace{(-2-\sqrt{3})}_{\approx -3{,}7})(x - \underbrace{(\sqrt{3}-2)}_{\approx 0{,}2})$
- $P_1 = 2X + 4$
- $X^2 + 4X + 1 = \frac{1}{2}(2x+4) - 1.$

Donc $P_2 = 1$

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_0(x)$ | + | − | − | − | + |
| $P_1(x)$ | − | − | 0 | + | + |
| $P_2(x)$ | + | + | + | + | + |
| $V(x)$ | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |

On s'intéresse aux a, b tq $V(a) - V(b) = 1$,

on peut ensuite approch $\sqrt{\ }$ via met Newton.

$V(-4) - V(-3) = 1$

$V(-1) - V(0) = 1.$